Curso : Z 2011 Fecha: 11-07- 2015 Nota: ....

Apellido y Nombre:...

Evaluación de Análisis Matemático II Parte 2

Teórico 1: Enunciado y demostración del Teorema de la **Independencia del camino en una integral de línea de un campo de gradientes.**

Teórico 2 : Enunciado y demostración de la **Condición necesaria para la existencia de función potencial.**

Prácticos: **Hacer el gráfico correspondiente en cada ejercicio práctico.**

1) a - Expresar el flujo del campo $\bar{f}(x,y,z)=(y\ ,-x\ ,z)$ a través de la superficie S: $x^2+y^2+z^2=6z$ con $2z \ge x^2+y^2$ por definición.
b – Lo mismo por medio de una conveniente aplicación del Teorema de la Divergencia.

---

2) Sea $\operatorname{rot}\bar{f}(x,y,z)=(-4x,\ y-z,\ 3z)$ Se pide: **– Aplicando Stokes** expresar la "Circulación "de $\bar{f}$ a lo a lo largo de la curva "C" tal que:
$C=S_1 \cap S_2$ si $S_1: x^2+y^2+z^2=4z$, $S_2: z=4-\sqrt{x^2+y^2}$
Represente gráficamente. Marque el sentido de circulación, como el del versor normal correspondiente.

3- Expresar la masa del cuerpo del **primer octante** formado por $3x^2+3y^2 \le z^2$, $x^2+y^2+z^2 \le 4z$ si la densidad en cada punto es directamente proporcional a la distancia al plano: $z=0$ en coordenadas cilíndricas y esféricas

---

4a) Expresar el flujo del campo $\bar{f}(x,y,z)=(-2y\ ,2x\ ,z)$ a través de la porción de superficie del primer octante de ecuación: $z=4-x^2$ con $z \ge x^2+2y^2$

4b) Expresar el área de la superficie del primer octante de ecuación: $x^2+y^2=4y$ con $z \le 4-x^2-y^2$

AM2	2° parcial Prof. Amed	HOJA N° 1/4 FECHA 11-7-15

[T1] Enunciado y demostración del teorema de Independencia del camino en una integral de línea de un campo de gradientes

U es un campo escalar diferenciable en un conjunto abierto simplemente conexo D

$U : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\bar{A}$ y $\bar{B} \in D$ unidos por una curva C regular a trozos dada por $\bar{g}(t)$, $t \in [a,b]$ con $A = \bar{g}(a)$ y $B = \bar{g}(b)$

$\Rightarrow \int_C \bar{\nabla} U \, d\bar{g} = U(\bar{B}) - U(\bar{A})$

dem:

$$\int_C \bar{\nabla} U \, d\bar{g} = \int_a^b \bar{\nabla} U(\bar{g}(t)) \, \bar{g}'(t) \, dt =$$

$$\overset{II}{=} \int_a^b h'(t) \, dt = h(t)\Big|_a^b = h(b) - h(a) =$$

$$\overset{I}{=} U(\bar{g}(b)) - U(\bar{g}(a)) = U(\bar{B}) - U(\bar{A})$$

en particular, si la curva es cerrada $\Rightarrow \bar{A} = \bar{B} \Rightarrow \int_C \bar{\nabla} U \, d\bar{g} = 0$

I) $h(t) = U(\bar{g}(t)) \overset{\text{Regla de la cadena}}{\underset{II}{\Rightarrow}} h'(t) = \bar{\nabla} U(\bar{g}(t)) \, g'(t)$

NOTA

#2 Enunciado y demostración de la Condición necesaria para la existencia de función potencial

$\bar{F}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;/\; \bar{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

$\bar{F}$ es un campo vectorial derivable con continuidad en el recinto D (simplemente conexo)

Si $\bar{F}$ admite función potencial $\Rightarrow P'_y = Q'_x$

dem

- $\exists U(x,y) \;/\; \bar{\nabla} U = \bar{F} \Rightarrow U'_x = P \wedge U'_y = Q$

$\Rightarrow U''_{xy} = P'_y \wedge U''_{yx} = Q'_x$

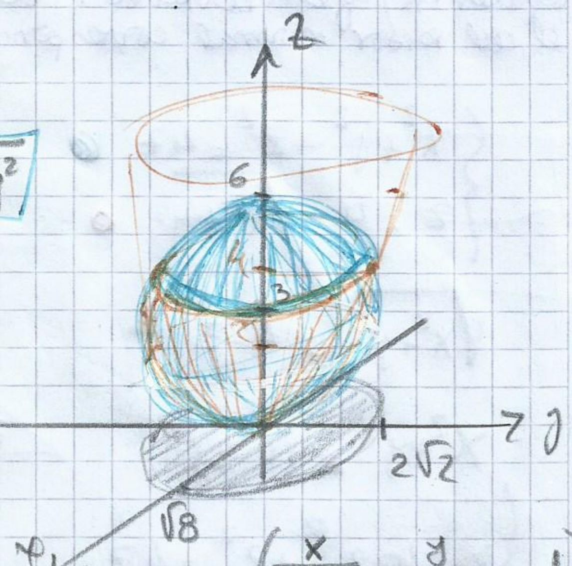
x hip $\Rightarrow P'_y \wedge Q'_x$ son continuas $\Rightarrow U''_{xy} \wedge U''_{yx}$ también lo son

$\Rightarrow$ por t. Schwarz $\Rightarrow U''_{xy} = U''_{yx} \Rightarrow P'_y = Q'_x$

NOTA

AM2	2° parcial Profr Amod	HOJA Nº 2/4 FECHA 11-7-15

(P1) a) Expresar el flujo del campo $\bar{F}(x,y,z) = (y, -x, z)$ a través de la sup $S: x^2+y^2+z^2 = 6z$ con $2z \geq x^2+y^2$ por definición



$$S = \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 6z \Rightarrow x^2+y^2+(z-3)^2 = 9 \\ \boxed{2z \geq x^2+y^2} \end{cases}$$

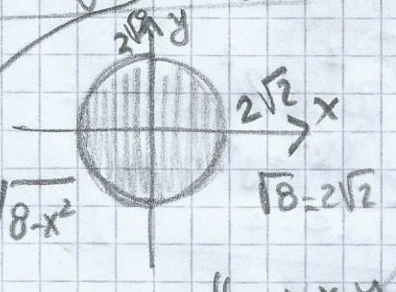
$z \geq 3$: $\boxed{z-3 = \sqrt{9-x^2-y^2}}$

Hallo la intersección para ver la proyección

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 6z \\ 2z = x^2+y^2 \end{cases} \rightarrow 2z+z^2 = 6z$$

$$z^2 = 4z \rightarrow z = 0, \quad \boxed{z = 4}$$

Proy: $x^2+y^2 \leq 8$



$|y| = \sqrt{8-x^2}$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, 1\right)$$

$$x^2+y^2+(z-3)^2 = 9 \Rightarrow N = \frac{\nabla G}{|G'_z|} = \left(\frac{2x}{2(z-3)}, \frac{2y}{2(z-3)}, \frac{2(z-3)}{2(z-3)}\right)$$

$$\iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \iint_{S_{xy}} \bar{F}\, N\, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} (y, -x, z) \left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, 1\right) dx\,dy$$

$$= \iint_{S_{xy}} \frac{xy}{\sqrt{9-x^2-y^2}} - \frac{xy}{\sqrt{9-x^2-y^2}} + z\, dx\,dy \qquad z = \sqrt{9-x^2-y^2} + 3$$

$$\boxed{\iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \int_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{9-x^2-y^2} + 3\, dx\,dy}$$

b) Lo mismo por medio de una conveniente aplicación del T. Diverg.

Agrego una tapa → cilindro $r = \sqrt{8}$ en $z = 4$ $\quad$ $\operatorname{div} = 1$

$$\oiint_{S_T} \bar{F}\, d\bar{s} = \iint_S \bar{F}\, d\bar{s} + \iint_T \bar{F}\, d\bar{s} \quad \text{x T. Diverg:} \quad \oiint_{ST} \bar{F}\, d\bar{s} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\, d\text{vol}$$

$$\iint_T \bar{F}\, d\bar{s} = \iint_{T_{xy}} \bar{F}\, N\, dx\,dy = \iint_{T_{xy}} (y, -x, \overset{z=4}{z})(0,0,-1)\, dx\,dy = \boxed{\iint_{T_{xy}} -4\, dx\,dy} = -4 \cdot \text{Área}$$

$$\boxed{\iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \iiint_W d\text{vol} - \left(-4\pi \cdot \sqrt{8}^2\right) \overset{c.v.}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{8}} \int_4^{\sqrt{9-r^2}+3} r\, dz\,dr\,dt + 32\pi}$$

NOTA

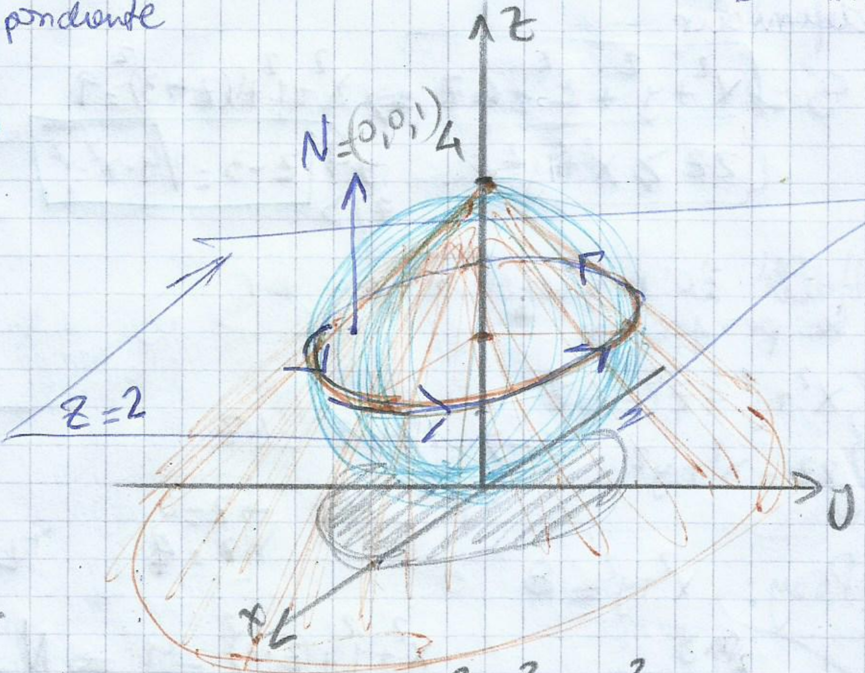
(P2) Sea $rot(\bar{F})_{(x,y,z)} = (-4x, y-z, 3z)$

Se pide, aplicando Stokes, expresar la circulación de f a lo largo de la curva C tal que:

$C = S_1 \cap S_2, \quad S_1: x^2+y^2+z^2 = 4z \quad S_2: z = 4-\sqrt{x^2+y^2}$

representar, gráficamente. Marcar el sentido de circulación como el del versor normal correspondiente

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4z \\ z = 4-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$



$\sqrt{x^2+y^2} = 4-z$

$x^2+y^2 = (4-z)^2$

$\hookrightarrow (4-z)^2+z^2 = 4z$

$16-8z+z^2+z^2 = 4z$

$2z^2-12z+16=0 \rightarrow z=2, \; z=4 \longrightarrow x^2+y^2+2^2 = 4\times 2$

vértice cono

curva plana $\nearrow$ $\boxed{C: \begin{cases} x^2+y^2 = 16 \\ z=2 \end{cases}}$

S: disco $r=4$ en $z=2$

C curva cerrada frontera de S

$\bar{f} \in C^1$ (componentes polinómicas) $\Big\}$ T. Stokes

$$\oint_C \bar{F}\,d\bar{l} = \iint_S rot(\bar{F})\,d\bar{S} = \iint_{S_{xy}} rot(\bar{F}) \cdot N \,dx\,dy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} (-4x, y-z, 3z)(0,0,1)\,dx\,dy = \iint_{S_{xy}} 3\overset{z=2}{z}\,dx\,dy =$$

$$= 6 \underbrace{\iint_{S_{xy}} dx\,dy}_{\text{Área } S_{xy}} = 6\times\pi\cdot 4^2$$

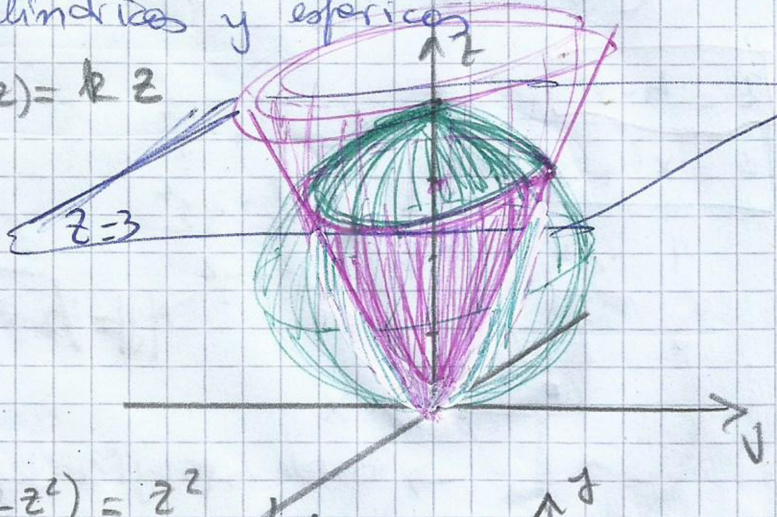
$$\boxed{\oint_C \bar{F}\,d\bar{l} = 96\pi}$$

NOTA

AM2	2° parcial Prof Amed	HOJA N° 3/4 FECHA 11-7-15

(P3) Expresar la masa del cuerpo del PRIMER OCTANTE formado por $3x^2+3y^2 \leq z^2$, $x^2+y^2+z^2 \leq 4z$ si la densidad en cada punto es directamente proporcional a la distancia al plano $z=0$ en coord. cilíndricas y esféricas

$\delta(x,y,z) = k|z| \to \delta(x,y,z) = kz$



$$\begin{cases} 3x^2+3y^2 \leq z^2 \\ x^2+y^2+z^2 \leq 4z \end{cases} \quad z \geq 0$$

intersección

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2) = z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 4z \end{cases} \to 3(4z-z^2) = z^2$$

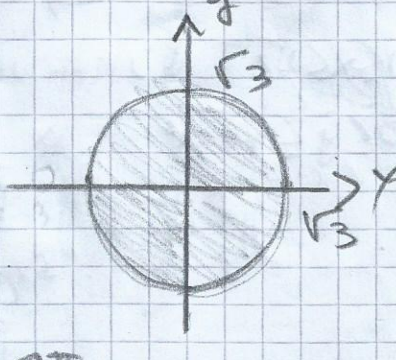
$x^2+y^2 = 4z-z^2$

$12z - 3z^2 = z^2$

$12z = 4z^2$

$z=0 \qquad z=3$

$\boxed{z=3} \quad x^2+y^2 = 12-9$



cilíndricas: $\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$, $\quad 0 \leq r \leq \sqrt{3}$

cono $\leq z \leq$ esfera

$x^2+y^2+(z-2)^2 = 4$

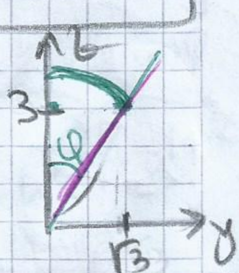
$\sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-(x^2+y^2)}+2$

$z-2 = \sqrt{4-(x^2+y^2)}$

$$\text{Masa} = \iiint_W \delta(x,y,z)\, d\text{vol} \overset{CV}{=} \boxed{\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{\sqrt{3}\,r}^{\sqrt{4-r^2}+2} \underbrace{r}_{Jac}\, kz\, dz\, dr\, dt = \text{Masa}}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\,\text{sen}(\varphi) \\ y = \rho\,\text{sen}(\theta)\,\text{sen}\,\varphi \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$$

$\rho^2 = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow \rho^{\cancel{2}} = 4\rho\cos\varphi$



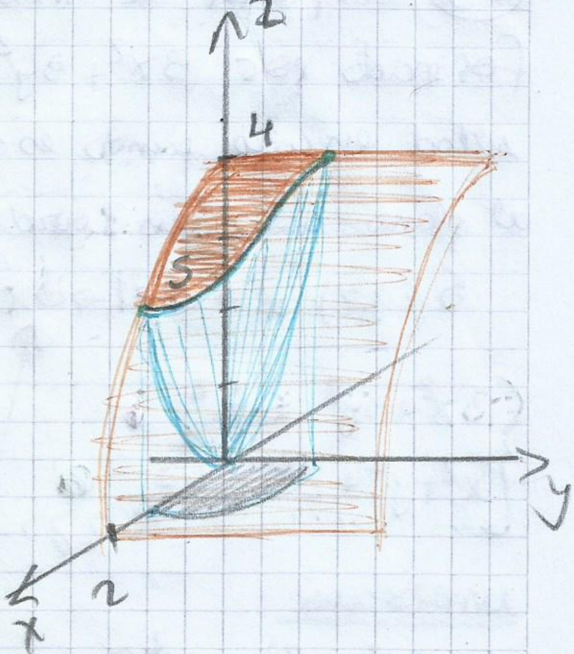
$\varphi = \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\varphi = \pi/6$

$$\boxed{\text{Masa} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{4\cos(\varphi)} \underbrace{\rho^2\,\text{sen}(\varphi)}_{Jac.}\, k\,\rho\cos(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta}$$

NOTA

(P4) a) Expresar el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (-2y, 2x, z)$ a través de la porción de sup. del primer octante de ecuación $z = 4 - x^2$ con $z \geq x^2 + 2y^2$

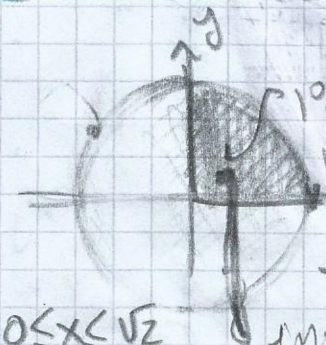


$$S: \begin{cases} x^2 + z = 4 \\ z \geq 4 + 2y^2 \end{cases} \rightarrow N = (2x, 0, 1)$$

$$\begin{cases} \boxed{z = 4 - x^2} \\ \boxed{z = x^2 + 2y^2} \end{cases} \rightarrow 4 - x^2 = x^2 + 2y^2$$

$$\underbrace{4 = 2x^2 + 2y^2}$$

$$2 = x^2 + y^2 \rightarrow |y| = \sqrt{2 - x^2}$$



→ Borde → proy. curva

interior → proy. de S

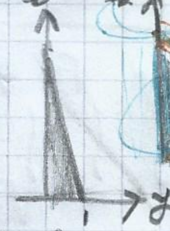
$0 \leq x \leq \sqrt{2}$

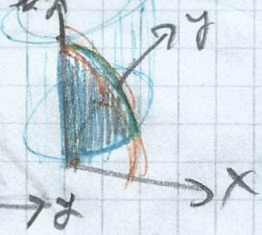
$0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}$

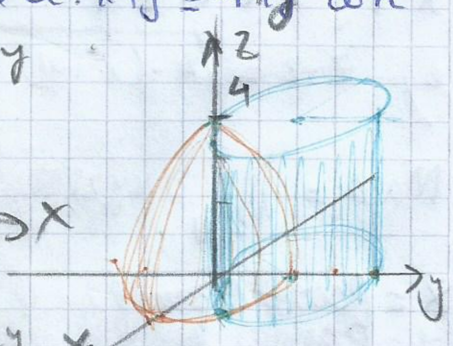
$$\iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \iint_{S_{xy}} \bar{F} \cdot N \, dx\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (-2y, 2x, \underset{z = 4 - x^2}{z})(2x, 0, 1)\, dx\,dy$$

$$\boxed{\iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} -4xy + 4 - x^2 \, dx\,dy}$$

b) Expresar el área de la sup. del 1° octante de ec. $x^2 + y^2 = 4y$ con $z \leq 4 - x^2 - y^2$







$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ z \leq 4 - (x^2 + y^2) \end{cases} \quad x = \sqrt{4 - (y-2)^2}$$

Proy en yz: $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 4y \\ x^2 + y^2 = 4 - z \end{matrix}\right\} 4y = 4 - z$ ↳ $z = 4 - 4y$

$$N = \frac{\nabla G}{|G'_x|}$$

$$N = \left(\frac{2x}{2x}, \frac{2(y-2)}{2x}, \frac{0}{2x} \right) = \left(1, \frac{y-2}{\sqrt{4 - (y-2)^2}}, 0 \right)$$

AM2 | 2° parcial | Prof. [illegible] | HOJA N° 4/4 | FECHA 11-7-15

$$\|N\| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{(y-2)}{\sqrt{4-(y-2)^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{(y-2)^2}{4-(y-2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4-\cancel{(y-2)^2}+\cancel{(y-2)^2}}{4-(y-2)^2}} = \boxed{\sqrt{\frac{4}{4-(y-2)^2}} = \|N\|}$$

$$\boxed{A_s = \iint_S dS = \iint_{S_{xy}} \|N\|\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{4-4y} \sqrt{\frac{4}{4-(y-2)^2}}\, dx\, dy}$$

NOTA